Курс «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики» (часть III)

1. Планы семинарских занятий и методические указания к ним на осенний семестр 2020–2021 уч. года

Семинар 12 (семинар 1 раздела III): 23.11–28.11

Постановка задачи синтеза схем для ФАЛ (операторов) из специальных классов, мощностные характеристики этих классов и соответствующие нижние оценки функций Шеннона для их сложности. Инвариантные и квазиинвариантные классы ФАЛ, их структурное описание и особенности поведения мощностных последовательностей. Теоретический материал [4, §§1,11].

В классе.

1. Выяснить, какие из следующих классов ФАЛ (операторов) являются невырожденными, и получить нижние мощностные оценки (НМО) функций Шеннона для сложности реализации ФАЛ из данных классов СФЭ в стандартном базисе:

   1) Q — класс ФАЛ, равных 1 при $x_1 = 0$;
   2) Q — класс ФАЛ, симметричных по БП x_1, x_2, x_3;
   3) Q — класс ФАЛ, монотонных по БП x_1, x_2;
   4) Q — класс ФАЛ, равных 0 на наборах с чётным числом 1;
   5) Q — класс линейных[1] ФАЛ;
   6) Q — класс самодвойственных[1] ФАЛ;
   7) Q — класс симметрических[1] ФАЛ;
   8) Q — класс операторов вида $F = (f_1, f_2, f_3)$ таких, что $f_1 \cdot f_2 \equiv 0$ при $i \neq j$ и $f_1 \vee f_2 \vee f_3 \equiv$ $\equiv 1$.

2. Выделить среди классов ФАЛ из п. 1 квазиинвариантные и инвариантные классы, для которых найти пределы соответствующих им мощностных последовательностей.

3. Найти порождающее множество класса линейных ФАЛ.

На дом.

1. Исследовать на невырожденность и, в случае невырожденности, установить асимптотику НМО функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ (операторов) от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса Q, где:

   1) Q — класс ФАЛ, равных 1 при $x_1 = x_2 = 1$;
   2) Q — класс ФАЛ, монотонных по x_1 и антимонотонных по x_2;
   3) Q — класс ФАЛ, у которых любая подфункция от БП x_1, x_2 принадлежит множеству $\{\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ x_1,\ x_2,\ x_1 \vee x_2,\ x_1 \sim x_2\}$;
   4) Q — класс операторов $F = (f_1, f_2)$ таких, что $f_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \bar{f}_1(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, где набор $\tilde{\beta}$ имеет номер на единицу больше, чем набор $\tilde{\alpha}$, если $\tilde{\alpha} \neq (1, \ldots, 1)$, и равен нулевому набору в противном случае.
   5) Q — класс ФАЛ, симметричных по своим $n, n = 1, 2, \ldots$ существенным БП с рабочими числами вида $a, a+4, a+8, \ldots, a+4k$, где $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ и $k = \lfloor (n-a)/4 \rfloor$;

[1]Класс рассматривался на лекциях.

2. Выделить среди классов ФАЛ из п. 1 квазиинвариантные и инвариантные классы, для которых найти пределы соответствующих им мощностных последовательностей.

3. Найти порождающее множество инвариантного класса ФАЛ, состоящего из констант и всех монотонных элементарных конъюнкций.

Методические указания.

Задача 1 решается на основе подсчета мощности множества $Q(n), n = 1, 2, \ldots,$ для рассматриваемого класса Q, а также определения невырожденного класса. Класс ФАЛ (операторов), то есть последовательность $Q(1), Q(2), \ldots, Q(n), \ldots$, где $Q(n)$ — некоторое множество систем из $m = m(n)$ ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$, считается невырожденным, если $n + m(n) = o(\log |Q(n)| / \log \log |Q(n)|)$.

Задача 2 решается на основе понятий квазиинвариантного и инвариантного классов. Класс ФАЛ $Q : Q(1), Q(2), \ldots, Q(n), \ldots$, называется *квазиинвариантным*, если для некоторого n_0 и любого n, $n \geq n_0$, множество ФАЛ, получающихся из ФАЛ множества $Q(n)$ подстановкой констант 0 и 1 вместо БП x_n, содержится в $Q(n-1)$. При этом его мощностная последовательность $\sigma_Q(n) = \log |Q(n)|/2^n$ монотонно не возрастает и стремится к пределу $\sigma_Q = \lim_{n\to\infty} \sigma_Q(n)$, $0 \leq \sigma_Q \leq 1$.

Класс ФАЛ Q называется *инвариантным*, если он замкнут относительно операций: 1) добавление и изъятие фиктивных БП ФАЛ; 2) переименование БП без отождествления; 3) подстановка констант вместо БП.

Задача 3 решается на базе определения порождающего элемента и порождающего множества нетривиального инвариантного класса Q, $Q \neq P_2$. При этом ФАЛ g, $g \notin P_2 \setminus Q$, считается *порождающим элементом* Q, если $g \notin Q$, но любая собственная подФАЛ g входит в Q, а максимальное по включению множество из попарно не конгруэнтных порождающих элементов Q называется его *порождающим* множеством.

Семинар 13 (семинар 2 раздела III): 30.11–5.12

Синтез СФЭ для ФАЛ из специальных классов на основе асимптотически оптимальных методов синтеза для квазиинвариантных классов ФАЛ и основных идей принципа локального кодирования, установление асимптотически соответствующих функций Шеннона.

В классе. Установить асимптотическое поведение функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ (операторов) от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса Q, где Q — один из невырожденных классов, указанных в пунктах 1–4, 8 классной задачи 1 семинара 12.

На дом. Установить асимптотическое поведение функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ (операторов) от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса Q, где Q — один из невырожденных классов, указанных в домашней задаче 1 семинара 12.

Методические указания.

Задачи 1-3 из списка как классных, так и домашних задач можно решать с помощью утверждения 29.1 про квазиинвариантные классы. Для решения классной задачи №4 достаточно применить простой вариант принципа локального кодирования (ПЛК), связанный с представлением ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n) \in Q(n)$ в виде $f = g(x_1, \ldots, x_{n-1}) \cdot (x_1 \oplus \ldots \oplus x_n)$, где $g = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_1 \oplus \ldots \oplus x_{n-1} \oplus 1)$.

Для решения классной задачи №8 и домашней задачи №4 необходимо использовать вариант ПЛК, связанный с кодированием для оператора $F \in Q(n)$ всех его «остаточных» операторов вида $F_{\sigma'}(x'') = F(\sigma', x'')$, где $x' = (x_1, \ldots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$ и $\sigma' \in B^q$, двоичными наборами подходящей длины. При этом основную по сложности часть искомой схемы будет составлять схема, реализующая оператор, который по набору σ' БП x' выдаёт код (в домашней задаче №4 в этом коде должен быть учтён один «дополнительный» разряд столбца значений ФАЛ f_1, позволяющий перейти к «следующему» набору значений БП x'') соответствующего остаточного оператора $F_{\sigma'}(x'')$. Вспомогательный оператор декодирования, который по набору σ'' значений БП x'' и коду оператора $F_{\sigma'}(x'')$ вычисляет $F(\sigma', \sigma'')$, при подходящем выборе параметров будет иметь существенно меньшую сложность.

Семинар 14 (семинар 3 раздела III): 7.12–12.12

Сложность не всюду определённых функций, их использование при синтезе схем для ФАЛ из специальных классов. Теорема Храпченко.

В классе.

1. Найти сложность не всюду определённой ФАЛ f, $f \in \hat{P}_2(3)$, для которой $\tilde{\alpha}_f = (0001\,1222)$.
2. Найти асимптотику функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса $Q(n)$, включающего в себя все те ФАЛ, которые обращаются в ноль на наборах куба B^n, имеющих не меньше $n/2$ единиц.
3. Доказать, что $12 \leqslant L^\pi(s_4^2) \leqslant 16$, где s_n^I — симметрическая ФАЛ от n БП, «рабочие» числа которой составляют множество I, $I \subseteq [0, n]$.
4. Доказать, что $L^\pi((x_1 \oplus \ldots \oplus x_k)(x_{k+1} \oplus \ldots \oplus x_n)) \geqslant n^2/2$.

На дом.

1. Найти сложность не всюду определённой ФАЛ f, $f \in \hat{P}_2(3)$, для которой $\tilde{\alpha}_f = (0111\,2221)$.
2. Найти асимптотику функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса $Q(n)$, включающего в себя все те ФАЛ, которые обращаются в ноль на наборах куба B^n, имеющих не равное i, $1 \leqslant i \leqslant n-2$ число единиц.
3. Доказать, что $63 \leqslant L^\pi(s_8^{\{2,4,6\}}) \leqslant 80$.
4. Доказать, что $L^\pi((x_1 \oplus \ldots \oplus x_k)(x_{k+1} \oplus \ldots \oplus x_s)(x_{s+1} \oplus \ldots \oplus x_n)) \geqslant n^2/3$, где $1 \leqslant k < s < n$.

Методические указания.

При решении классной (домашней) задачи №1 необходимо сначала убедиться в том, что любое доопределение g ФАЛ f существенно зависит от k, где $k = 3$ (соответственно $k = 2$) БП, т. е. $L^{\mathrm{C}}(g) \geq k - 1$. После этого достаточно взять в качестве доопределения g ФАЛ f из классной (домашней) задачи ФАЛ, столбец значения которой имеет вид $(0001\,1111)$ (соответственно $(0111\,0111)$) и реализовать её формулой $x_1 \vee x_2 x_3$ (соответственно $x_1 \vee x_3$) сложности k.

В классной (домашней) задаче №2 нижние мощностные асимптотические оценки вида $2^{n-1}/n$ (соответственно $c_n^i / \log c_n^i$) функции Шеннона $L^{\mathrm{C}}(Q(n))$ устанавливаются с помощью утверждения 26.1. Для получения соответствующих верхних оценок произвольная ФАЛ g, $g \in Q(n)$, представляется в виде $g = f \cdot h$, где $f \in \hat{P}_2(n)$ с областью определения A, $A \subseteq B^n$, которая состоит из «нижней» половины слоёв куба в случае классной задачи и i-го слоя куба в случае домашней задачи, а h — характеристическая ФАЛ множества A. После этого ФАЛ f реализуется как не всюду определённая ФАЛ по утверждению[1] 32.2, а ФАЛ h — как симметрическая ФАЛ, имеющая линейную сложность (замечание к утв. 31.1).

Как классная, так и домашняя задачи 3, 4 решаются с помощью теоремы Храпченко (утверждение 36.1) при подходящем подборе множеств $\mathcal{N}'$ и $\mathcal{N}''$, который максимизирует оценку сложности. Так, в классной задаче №3 $\mathcal{N}' = B_2^4$ и $\mathcal{N}'' = B_1^4 \cup B_3^4$, в классной задаче №4 — $\mathcal{N}' = N_f$, а $\mathcal{N}''$ состоит из всех соседних с $\mathcal{N}'$ наборов и т. п.

[1] В этом утверждении $\hat{P}_2(n, t)$ — множество всех не всюду определённых ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$, имеющих область определённости из t наборов куба B^n.

Требуемые верхние оценки получаются прямым построением искомых π-схем или соответствующих им формул с поднятыми отрицаниями:

$$s_4^2 = (x_1 \oplus x_2)(x_3 \oplus x_4) \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 x_4,$$
$$s_8^{\{2,4,6\}} = (x_1 \oplus \ldots \oplus x_8) s_8^{\{0,8\}}(x_1, \ldots, x_8).$$

2. Литература

1. Марченков С. С. Избранные главы дискретной математики. — М.: МАКС Пресс, 2016. — 133 с.
   http://mk.cs.msu.ru/images/2/25/ИзбрГлавыДискрМатем_2015.pdf

2. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2003. — 384 с.

3. Ложкин С. А. Лекции по основам кибернетики. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2004. — 256 с.

4. Ложкин С. А. Дополнительные главы кибернетики. — МГУ, 2019.
   http://mk.cs.msu.ru/images/0/0b/Dgcyb-lect-190113.pdf

5. Яблонский С. В. Элементы математической кибернетики. — М.: Высшая школа, 2007. — 188 с.

6. Сапоженко А. А. Некоторые вопросы сложности алгоритмов. — М.: Изд-во МГУ, 2001. — 46 с.
   http://mk.cs.msu.ru/images/e/e8/Sapozhenko_alg.pdf (номера страниц не соответствуют печатному изданию)

7. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. — М.: Физматлит, 2005. — 416 с.

8. Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Ложкин С. А., Романов Д. С., Сапоженко А. А., Селезнёва С. Н. Задачи по курсу «Основы кибернетики»: 2-е изд. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, 2011. — 71 с.
   http://mk.cs.msu.ru/images/a/ab/Задачи_по_курсу_Основы_кибернетики_2011.pdf